УДК 004.032.26

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ФАКТОРИЗАЦИИ ВИНЕРА — ХОПФА

Е. В. Алымова[1], О. Е. Кудрявцев[1,2]

[1]Российская таможенная академия (Ростовский филиал)
[2]ООО НПФ «ИнВайз Системс»

Аннотация. Применение алгоритмов машинного обучения в комбинации с методами финансовой математики позволяют оптимизировать скорость вычислений при прогнозировании поведения высокодоходных и выскорисковых финансовых инструментов. В статье предлагается подход к обучению нейросети для решения задачи факторизации Винера — Хопфа. Проведен эксперимент разложения на сомножители полиномов 2-й и 6-й степени. Описана функция потерь для оценки параметров нейронной сети, учитывающая особенности задачи факторизации.
Ключевые слова: нейронные сети, машинное обучение, функция потерь, факторизация Винера — Хопфа, моделирование процессов Леви.

Введение

Процессы Леви используются для построения естественных и экономических моделей [1]. Высоколиквидные и высокорисковые финансовые инструменты характеризуются естественными скачками цен, что повышает значимость процессов Леви при моделировании цен опционов.

Существуют различные численные методы для вычисления цен разных типов опционов. Так, для вычисления цен барьерных опционов используются методы Монте-Карло, недостатком которых является низкая скорость вычислений в случае экзотических опционов. Также применяются конечно-разностные схемы, требующие проведения глубокого анализа процесса Леви в основе модели, и методы факторизации Винера — Хопфа, в основе которых лежат нетривиальные формулы аппроксимации (см., например, [2]).

Быстрые алгоритмы вычисления цен опционов в комбинации с методами машинного обучения становятся основой реализации торговых систем для управления рисками на финансовом рынке. Таким образом гибридные методы вычисления цен барьерных опционов имеют практическую значимость, а их разработка остается актуальной задачей вычислительной финансовой математики.

В данной работе рассматривается частный случай факторизации Винера — Хопфа характеристических функций дискретных случайных величин с помощью нейронной сети. Методика реализована на примере обучения нейросети разложению полиномов 2-й и 6-й степеней на множители специального вида. Предложенный метод может быть распространен на случай многочленов более высоких степеней и использоваться в решении задач приближенной факторизации Винера — Хопфа для процессов Леви.

1. Постановка задачи

Пусть задана следующая последовательность чисел:

$$p_0, p_1, \cdots, p_{M-2} \mid p_k \geq 0, \sum_{k=0}^{M-2} p_k = 1, M = 2^N, N \in \mathbb{N}.$$

При $k \le \dfrac{M-2}{2}$ последовательность p_k возрастает, а при $k > \dfrac{M-2}{2}$ — убывает. Тогда $\varphi(\xi) = \sum_{k=0}^{M-2} p_k e^{i\xi\left(k-\frac{M}{2}+1\right)}$ является характеристической функции дискретной случайной величины X, принимающей значения в точках $x_k = k - \dfrac{M}{2} + 1$ с вероятностями p_k, $k = 0, \cdots, M-2$. Мы хотим представить характеристическую функцию X в виде следующего произведения характеристических функций двух независимых дискретных случайных величин, принимающих неотрицательные и неположительные значения:

$$\varphi(\xi) = \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} \beta_k e^{i\xi k} \cdot \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} \alpha_k e^{-i\xi k},$$

где

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{M/2} \mid \alpha_i \ge 0, \sum_{i=0}^{M/2} \alpha_i = 1, 0 \le \alpha_i < \alpha_{i+1} < 1;$$

$$\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{M/2} \mid \beta_i \ge 0, \sum_{i=0}^{M/2} \beta_i = 1, 1 \ge \beta_{i+1} > \beta_i > 0.$$

Указанная задача сводится к поиску факторизации

$$p(x) = q(x) \cdot r(x), \tag{1}$$

где

$$q(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{M/2} x^{M/2-1};$$
$$r(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_{M/2} x^{M/2-1};$$
$$p(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_{M-1} x^{M-2}.$$

Для решения задачи (1) мы планируем обучить нейросеть для поиска коэффициентов многочленов q и r, произведение которых равно заданному многочлену p.

2. Факторизация полиномов с помощью нейронной сети

2.1. Нейронная сеть для поиска коэффициентов факторизации полинома

Согласно универсальной теореме аппроксимации Д. Цыбенко [3], нейронная сеть прямой связи (feed-forward) с одним скрытым слоем может аппроксимировать любую непрерывную функцию многих переменных с любой точностью.

В данной работе для факторизации полинома аппроксимируется функция $F : (p_i) \to (\alpha_j, \beta_k)$. Причем для факторизации полинома 3-й степени $i = \overline{0,2}$; $j,k = \overline{0,1}$, а для 6-й степени $i = \overline{0,6}$; $j,k = \overline{0,3}$.

Нейронная сеть реализована на основе библиотеки Tensorflow для Python. На рис. 1 представлена архитектура нейронной сети аппроксимации функции F для полинома 3-й степени.

Сеть состоит из трех полносвязных слоев. Для входного и выходного слоя используется линейная функция активация. Функция активации скрытого слоя — сигмоида.

На вход сеть получает коэффициенты заданного квадратного трехчлена. Выходными значениями сети являются коэффициенты полиномов-сомножителей. Выходные сомножители — это полиномы 1-й степени с двумя коэффициентами, сумма которых равна единице. Таким образом, сеть предсказывает по одному коэффициенту для каждого полинома-сомножителя, а второй коэффициент вычисляется как разность предсказанного с единицей.

Количество нейронов на скрытом слое подбираются эмпирически для достижения большей точности результата.

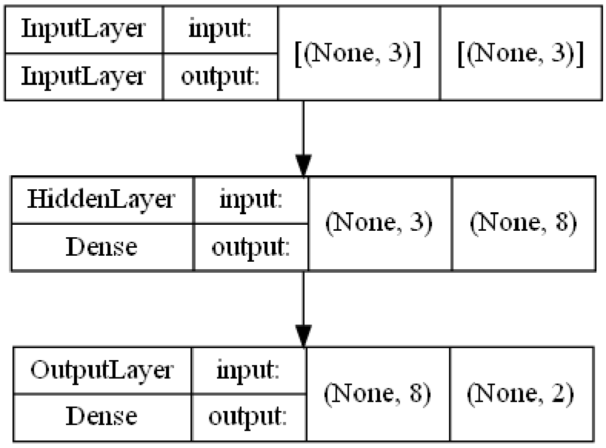

Рис. 1. Схема нейронной сети аппроксимации функции F для квадратного трехчлена

Архитектура нейросети аппроксимации функции F для полинома 6-й степени представлена на рис. 2. На вход нейросети подаётся 7 коэффициентов полинома 6-й степени. На выходе по 3 коэффициента полиномов-сомножителей 3-й степени. Последний коэффициент для каждого полинома-сомножителя вычисляется как разность суммы предсказанных коэффициентов с единицей.

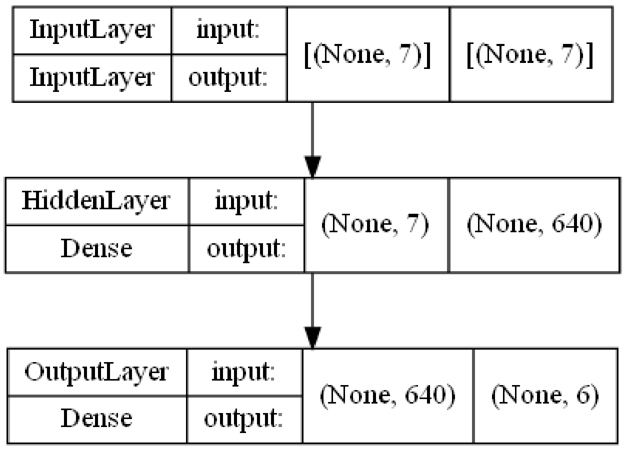

Рис. 2. Схема нейронной сети аппроксимации функции F для полинома 6-й степени

2.2. Формулы для функций обучения нейросети

При $M = 4$ равенство (1) принимает следующий вид:

$$\frac{p_0}{x} + p_1 + p_2 x = \left(\frac{\alpha_0}{x} + \alpha_1\right) \cdot \left(\beta_0 + \beta_1 x\right), \tag{2}$$

Умножив и разделив (2) на x, получим задачу разложения квадратного трёхчлена на два сомножителя:

$$p_0 + p_1 x + p_2 x^2 = \left(\alpha_0 + \alpha_1 x\right) \cdot \left(\beta_0 + \beta_1 x\right). \tag{3}$$

При этом в (3) самые маленькие коэффициенты α_0 и β_1 вычисляются по формулам:

$$\alpha_0 = 1 - \alpha_1,$$

$$\beta_1 = 1 - \beta_0.$$

Из (3) выведем формулы для вычисления коэффициентов p_0, p_1, p_2 при заданных α_i, β_i $(i = 0,1)$:

$$p_0 = \alpha_0 \cdot \beta_0;$$
$$p_1 = \alpha_1 \cdot \beta_0 + \alpha_0 \cdot \beta_1; \qquad (4)$$
$$p_2 = \alpha_1 \cdot \beta_1.$$

При $M = 8$ равенство (1) после аналогичных преобразований примет вид:

$$\sum_{i=0}^{6} p_i x^i = \left(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3\right) \cdot \left(\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3\right). \qquad (5)$$

При этом в (5) самые маленькие коэффициенты α_0 и β_3 вычисляются по формулам:

$$\alpha_0 = 1 - \sum_{i=1}^{3} \alpha_i,$$
$$\beta_3 = 1 - \sum_{i=0}^{2} \beta_i.$$

Из (5) выведем формулы для вычисления коэффициентов p_i $(i = \overline{0,6})$ при заданных α_j, β_j $(j = \overline{0,3})$:

$$p_0 = \alpha_0 \cdot \beta_0;$$
$$p_1 = \alpha_0 \cdot \beta_1 + \alpha_1 \cdot \beta_0;$$
$$p_2 = \alpha_0 \cdot \beta_2 + \alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2 \cdot \beta_0;$$
$$p_3 = \alpha_0 \cdot \beta_3 + \alpha_1 \cdot \beta_2 + \alpha_2 \cdot \beta_1 + \alpha_3 \cdot \beta_0; \qquad (6)$$
$$p_4 = \alpha_1 \cdot \beta_3 + \alpha_2 \cdot \beta_2 + \alpha_3 \cdot \beta_1;$$
$$p_5 = \alpha_2 \cdot \beta_3 + \alpha_3 \cdot \beta_2;$$
$$p_6 = \alpha_3 \cdot \beta_3.$$

Формулы (4) и (6) используются в функциях генерации обучающих данных для нейросети.

2.3. Функция потерь для обучения нейросети

Известно, что два многочлена n-й степени тождественно равны, если их значения совпадают $n+1$ различных точках. Используя это свойство, в задаче факторизации произвольного многочлена степени $M-2$, мы будем сравнивать мы должны определить значения исходного и факторизованного многочленов в точках, равных комплексным корням из единицы степени M. Учитывая, что M — степень двойки, мы можем эффективно реализовать подсчет необходимых значений с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье.

Такой подход оказывается более эффективным по сравнению со стандартной функцией потерь MSE (средняя квадратичная ошибка).

Для обучения сети предлагаемая функция потерь для факторизации полинома 2-й степени построена следующим образом.

Пусть

$$\mathbf{A} = \left[1 - \alpha_1, \alpha_1, 0, 0\right];$$
$$\mathbf{B} = \left[\beta_0, 1 - \beta_0, 0, 0\right];$$
$$\mathbf{C} = \left[p_0, p_1, p_2, 0\right],$$

где p_0, p_1, p_2 — известные значения коэффициентов квадратного трехчлена, α_1, β_0 — предсказанные значения коэффициентов многочленов-сомножителей.

Определяем вектор $\mathbf{D}$ следующим образом:

$$\mathbf{D} = FFT(\mathbf{A}) \cdot FFT(\mathbf{B}) - FFT(\mathbf{C}),$$

где $FFT()$ — функция быстрого преобразования Фурье.

Функция потерь $CLOSS2$ возвращает осредненный квадрат суммы вещественной и мнимой части по всем точкам вектора **D**:

$$CLOSS2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(real(D_i) + imag(D_i)\right)^2.$$

При факторизации полинома 6-й степени векторы **A**, **B**, **C** строятся следующим образом:

$$\mathbf{A} = \left[1 - \sum_{\mathrm{j}=0}^{2}\alpha_{\mathrm{j}}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, 0, 0, 0, 0\right];$$

$$\mathbf{B} = \left[\beta_0, \beta_1, \beta_2, 1 - \sum_{\mathrm{k}=0}^{2}\beta_{\mathrm{k}}, 0, 0, 0, 0\right];$$

$$\mathbf{C} = \left[p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, 0\right],$$

где p_i, $i = \overline{0,6}$ — известные значения коэффициентов полинома 6-й степени, α_j $(j = \overline{0,2})$, β_k $(k = \overline{0,2})$ — предсказанные значения коэффициентов многочленов-сомножителей.

В функцию потерь $CLOSS6$ вводится штраф за нарушение условий возрастания последовательности α_j $(j = \overline{0,2})$ и убывания последовательности β_k $(k = \overline{0,2})$.

Пусть:

$$\mathrm{PenaltyA} = \left|\min\left(0,\ \alpha_1 - \alpha_0, \alpha_2 - \alpha_1\right)\right|;$$

$$\mathrm{PenaltyB} = \left|\min\left(0,\ \beta_0 - \beta_1, \beta_1 - \beta_2\right)\right|.$$

Тогда функция потерь при обучении нейросети факторизации полинома 6-й степени будет иметь вид:

$$CLOSS6 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(real(D_i) + imag(D_i)\right)^2 + \mathrm{PenaltyA} + \mathrm{PenaltyB}.$$

3. Результаты обучения нейронной сети факторизации полиномов

В ходе эксперимента обучены две нейросети факторизации полиномов 2-й и 6-й степени. Каждая нейросеть обучалась на 1 млн. вариантов обучающих данных, сгенерированных по формулам (4), (6).

Точность результата работы нейросетей достигалась путем подбора оптимального количества нейронов на скрытом слое.

В рамках эксперимента произведен перебор значений N количества нейронов на скрытом слое. В табл. 1 представлены значения функции потерь при обучении нейросети факторизации полинома 2-й степени. Точность выше 1.00e–05 достигается при 8-х нейронах на скрытом слое.

Таблица 1

Результаты оценки точности факторизации полинома 2-й степени

N	$CLOSS2$
4	2.62e–05
8	3.45e–06

В табл. 2 приведены значения функции потерь при обучении нейросети факторизации полинома 6-й степени. Ввиду большей сложности потребовалось больше нейронов на скрытом слое. Точность выше 1.00e–05 достигается уже при 1024-х нейронах на скрытом слое.

Таблица 2

Результаты оценки точности факторизации полинома 6-й степени

N	$CLOSS6$
128	7.82e–03
256	6.27e–04
512	1.04e–04
1024	6.31e–06

Заключение

Гибридные методы вычисления цен барьерных опционов являются перспективным направлением в повышении эффективности разработки инструментов управления рисками на финансовом рынке. Моделирование скачков цен процессом Леви может быть оптимизировано за счет применения методов факторизации Винера-Хопфа и нейронной сети предсказания коэффициентов факторизации.

В работе представлены детали реализации нейронных сетей прямого распространения для решения задачи факторизации полиномов 2-й и 6-степени. Вместо стандартной функции потерь MSE средней квадратичной ошибки предложен подход, основанный на использовании быстрого преобразования Фурье при установлении равенства исходного и факторизованного полиномов.

В ходе практического эксперимента подобрано число нейронов на скрытом слое, позволяющее достичь практически значимой точности предсказания коэффициентов факторизации.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 23-21-00474).

Литература

1. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Теория. – М. : ФАЗИС, 1998. – 544 с.

2. *Кудрявцев О. Е.* Приближенная факторизация Винера — Хопфа и методы Монте-Карло для процессов Леви // Теория вероятн. и ее примен. – 2019. – Т. 64, № 2. – С. 228–257.

3. *Cybenko G.* Approximation by superpositions of a sigmoidal function // Mathematics of control, signals and systems. – 1989. – Т. 2. – №. 4. – С. 303–314.